

Calcul Algébrique

Ce chapitre a pour but de réviser quelques techniques de calcul régulièrement utilisées en mathématiques, ainsi que d'aborder la notion de somme symbolique.

Remarque : Le mot algèbre découle du mot arabe « al-jabr », signifiant « réduction d'une fracture », « reconstruction », « connexion ». Initialement, elle faisait le lien entre l'arithmétique et la géométrie. Dans le contexte de ce chapitre, l'algèbre désigne la transformation d'une équation par ajout d'un terme. Plus généralement, l'algèbre désigne le domaine des mathématiques qui s'intéresse à l'étude de certains ensembles munis de structures spécifiques (appelées justement structures algébriques). Au second semestre, nous étudierons notamment l'algèbre linéaire.

1 Équations du second degré dans $\mathbb{R}$ (révisions)

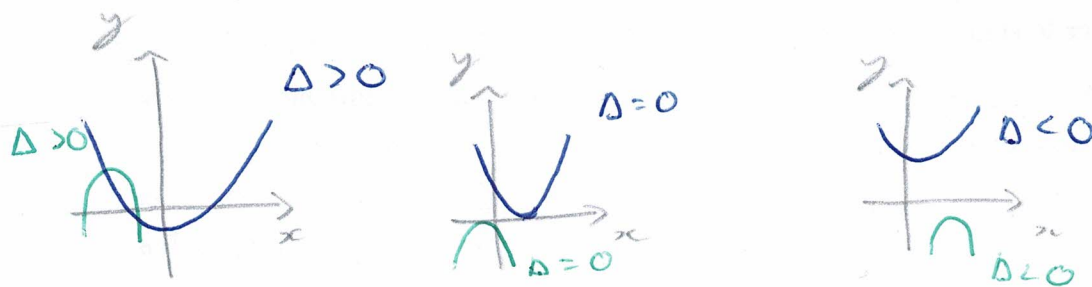
On s'intéresse à l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ avec a réel non nul, b et c réels quelconques.

On appelle discriminant le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition 1 :

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule racine, dite double, $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes $x = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{\Delta})$.

Interprétation graphique



Cas simples

Il ne faut pas systématiquement, lorsqu'on doit factoriser un polynôme du second degré, se ruiner sur le calcul du discriminant. On peut :

- utiliser des identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

- trouver une racine évidente r , puis factoriser alors par $(x - r)$

Exemple 1 :

- $x^2 + 4x + 4 = \dots$ (racine double)
- $x^2 - x - 2 = \dots$ (racine évidente) $(x-2)(x+1)$

$$= ax^2 + (b-2a)x - 2b$$

$$a=1 \quad b-2a=-1 \quad -2b=-2 \Rightarrow a=b=1$$

Cette dernière méthode peut s'appliquer à tout polynôme de degré supérieur ou égal à 2 : dès qu'une racine r est trouvée (évidente ou suggérée par le texte), on peut factoriser par $(x - r)$, et il reste alors à trouver le facteur restant. Pour cela, on dispose de deux techniques :

- l'identification après avoir donné la factorisation *a priori* et développé.
- la division euclidienne, dont le reste sera alors nul.

Exemple 2 : Factoriser $x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x - 1)(x^2 + ax - 4)$

$$= x^3 + (a-1)x^2 + (-4-a)x + 4$$

$$\text{Soit } a-1 = -4$$

$$-4-a = -1$$

$$a = -3$$

$$\text{Soit } = (x-1)(x^2-3x-4)$$

$$= (x-1)(x+1)(x-4)$$

Donc :

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x-1)(x+1)(x-4)$$

2 Inéquations

Tableaux de signes

Pour connaître le signe d'un polynôme, on peut le factoriser et déterminer le signe de chaque facteur. On applique ensuite les règles de signe et on résume dans un tableau de signes.

Exemple 3 : Étudier le signe de $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
produit	+	0	-	+

Cas particulier du second degré

En se servant de l'interprétation graphique précédente, on peut obtenir la propriété suivante :

Proposition 2 : Le signe de $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est :

- celui de a si $\Delta < 0$.
- celui de a à l'extérieur des racines si $\Delta > 0$, et l'opposé de a entre les racines.

Exemple 4 : Résoudre $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

3 Sommes

Les sommes symboliques sont un outil essentiel des mathématiques. Elles permettent de représenter de manière compacte des expressions qui s'étireraient en longueur si l'on écrivait chacun des termes explicitement. Ce type de sommes apparaît dans des domaines variés : en physique notamment, sous forme de séries pour résoudre des équations différentielles (paquet d'ondes en physique quantique, séries de Fourier représentant des signaux,...), mais aussi en informatique, où l'usage d'une formule mathématique simple plutôt que de boucles imbriquées permet de réduire considérablement le temps d'exécution d'un programme (voir TD). Savoir les manipuler est donc crucial.

3.1 Notation, vocabulaire

Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$. On note

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

k est appelé **indice de sommation**, tandis que m et n sont les bornes (inférieure et supérieure) de la somme.

Remarque : L'indice de sommation k est **muet** : cela signifie que le **résultat** d'une somme ne dépend **jamais** de cet **indice**, et on peut tout aussi bien lui attribuer la lettre j , i , etc.

Exemple 5 :

- $\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
- $\sum_{k=2}^4 a_k = a_2 + a_3 + a_4$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $\sum_{k=1}^3 n = n + n + n = 3n$

3.2 Manipulations - propriétés

- Glissement (ou translation) d'indice : $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$.

Remarque : Tout se passe comme si on remplaçait partout k par $k - p$

- Casser une somme : $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$.
- Linéarité : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors

$$\sum (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum a_k + \mu \sum b_k$$

- Si $\forall k \in [m, n] a_k \leq b_k$, alors $\sum_{k=m}^n a_k \leq \sum_{k=m}^n b_k$.
- Télescopage : lorsque la plupart des termes s'annulent entre eux.

Exemple 6 : $\sum_{k=1}^5 (a_{k+1} - a_k) = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 = a_5 - a_1$

3.3 Suites

Définition 1 (suite arithmétique) :

Une suite (u_n) est dite arithmétique si $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 3 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique) : Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors on a $\sum_{k=n_0}^n u_k = \frac{u_{n_0} + u_n}{2}(n - n_0 + 1)$

Remarque : On peut comprendre le résultat précédent de la manière suivante : demi-somme des termes extrêmes multipliée par le nombre de termes. Ce résultat n'est pas à connaître par cœur.

Exemple 7 (application de la formule) : $\sum_{k=2}^{n-1} (3k - 5) =$

Définition 2 (suite géométrique) :

Une suite (v_n) est dite géométrique si $\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = qv_n$.

Proposition 4 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique) : Soit (v_n) une suite géométrique. Alors on a $\sum_{k=n_0}^n v_k = v_{n_0} \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}$, si $q \neq 1$.

Exemple 8 (Application directe de la formule) : $\sum_{k=1}^5 2^k =$

3.4 Sommes classiques

Les deux sommes précédentes présentent chacune un cas particulier qu'il faut connaître.

Proposition 5 (Somme des entiers consécutifs) :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S_n + S_n = n + 1 + n + 1 + n + 1 + \dots + n + 1 \quad \leftarrow n \text{ fois}$$

$$2S_n = n(n+1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition 6 (Somme des puissances consécutives) : Soit $q \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

$$T_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$T_n = 1 - q(T_n - q^n)$$

$$\Leftrightarrow T_n = 1 + qT_n - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow T_n - qT_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow T_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow T_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad q \neq 1$$

Remarque : Ne pas confondre « faire une petite somme », par exemple $\sum_{k=1}^n k$, ce qui est toujours apprécié en cours de mathématiques, et « faire un petit somme », ce qui est interdit pendant les cours, sauf si vous rêvez de mathématiques.

Proposition 7 (Binôme de Newton) :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Remarque : La somme contient $n + 1$ termes et la somme des exposants vaut n .

3.5 Doubles sommes

Ne prenez pas peur, mais on peut avoir des sommes de sommes...

Exemple 9 : Exprimer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1p} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2p} + \dots + a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{np}$

Remarque : Cela revient à additionner tous les coeff d'une matrice de taille $n \times p$.

4 Produit

On utilise le symbole $\prod$ pour écrire un produit d'éléments.

Définition 3 : On note $\prod_{k=m}^n a_k = a_m a_{m+1} \dots a_n$.

Exemple 10 : $\prod_{k=1}^n k = n!$

Nous n'utiliserons que peu cette notation et les propriétés associées cette année.

5 Systèmes linéaires

Définition 4 : Un système linéaire est un système d'équations linéaires du type suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent, il y a n équations et p inconnues. Les nombres (réels ou complexes) a_{ij} et b_i sont donnés et sont appelés les coefficients du système. Les x_i sont les inconnues du système. Résoudre signifie donc déterminer toutes les valeurs possibles des x_i .

Remarque : Un tel système est dit linéaire car les inconnues apparaissent "telles quelles", c'est-à-dire qu'elles n'apparaissent jamais sous forme de puissances, de compositions de fonctions, etc., et elles ne sont pas multipliées entre elles. On dit que les inconnues apparaissent sous forme de *combinaisons linéaires*, c'est-à-dire qu'on multiplie les inconnues par des coefficients constants puis on les ajoute entre elles.

Pour résoudre un tel système, on n'utilisera plus la méthode de substitution utilisée au lycée, mais une méthode plus robuste.

5.1 Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss consiste à manipuler les lignes afin d'obtenir un système triangulaire, ou du moins échelonné. Les opérations autorisées sont les suivantes :

- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- Ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres lignes : $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j L_j$.
Attention : on doit absolument garder l'information de la ligne que l'on modifie.
- Echange de lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Supprimer une ligne quand deux sont identiques
- Changer l'ordre des inconnues

Exemple 11 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

5.2 Cas particulier d'un système 2×2

On s'intéresse au système :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

On peut représenter ce système matriciellement de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Définition 5 : Le déterminant du système est $D = ad - bc$.

Proposition 8 : Si $D \neq 0$, il existe une unique solution donnée par :

$$x = \frac{de - bf}{D}, \quad y = \frac{af - ce}{D}.$$

6 Polynômes

Les fonctions polynômiales font partie des fonctions les plus simples, et sont donc également parmi les plus utilisées. Les polynômes¹ apparaissent dans des domaines très variés : calculs

1. Dans ce chapitre, nous utiliserons indistinctement les termes "fonction polynômiale" et "polynôme", bien qu'en algèbre, les polynômes soient des objets plus abstraits obéissant à certaines règles bien définies, et ne correspondent pas à des fonctions.

de trajectoires, approximations locales de fonctions (cf chapitre sur les développements limités au second semestre), interpolation polynômiale, graphisme et CAO (courbes de Bézier), Développement en séries entières (permet notamment de résoudre certaines équations différentielles, par exemple en mécanique quantique)...

Les polynômes sont tellement utilisés que de nombreux scientifiques ont donné leurs noms à certains types de polynômes. Il existe ainsi les polynômes de Bernstein, de Lagrange, d'Euler, de Hermite...

Nous nous intéresserons ici essentiellement aux propriétés de base des polynômes. Nous aborderons notamment les notions de division euclidienne, d'irréductibilité, et de décomposition en éléments simples.

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7 Définitions et propriétés

7.1 Définitions

Définition 6 : Un *polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

- Les a_i sont appelés les *coefficients* du polynôme.
- Si tous les coefficients a_i sont nuls, P est appelé le *polynôme nul*, il est noté 0.
- On appelle le *degré* de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$; on le note $\deg(P)$. Pour le degré du polynôme nul on pose par convention
- Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ est appelé un *polynôme constant*. Si $a_0 \neq 0$, son degré est 0.
- Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type $a_k X^k$) sont appelés monômes.
- Le monôme $a_n X^n$ est appelé terme dominant, tandis que le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant de P .
- Si le coefficient dominant est 1, on dit que P est un polynôme unitaire.

7.2 Opérations sur les polynômes

- **Égalité.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$P = Q \iff \forall i \quad a_i = b_i$$

et on dit que P et Q sont égaux.

- **Addition.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$.

On définit :

$$P + Q = (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0)$$

- **Multiplication.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0$. On définit

$$P \times Q = c_r X^r + c_{r-1} X^{r-1} + \dots + c_1 X + c_0$$

avec $r = n + m$ et $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ pour $k \in \{0, \dots, r\}$.

- **Multiplication par un scalaire.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \cdot P$ est le polynôme dont le i -ème coefficient est λa_i .
- **Composition.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0$. Alors $P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$.

Proposition 9 (Degrés) : Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

8 Arithmétique des polynômes

Il existe de grandes similitudes entre l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.

8.1 Rappels d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Définition 7 : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

On note alors

Définition 8 :

- On dit qu'un nombre entier est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
- On dit que deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun autre diviseur commun que 1.

Théorème 1 (Division euclidienne) :

Remarque : On dit alors que a est congru à r modulo b , ce qui se note $a \equiv r[b]$ ou bien $a \equiv r(\text{mod } b)$. Dire que deux nombres sont congrus signifie qu'ils ont le même reste dans la division euclidienne.

Théorème 2 (Algorithme d'Euclide) : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b . Alors

On en déduit l'algorithme d'Euclide, qui permet de déterminer le pgcd de deux entiers par divisions euclidiennes successives. Le pgcd correspondra alors au dernier reste non nul. Le reste diminue à chaque étape.

Exemple 12 : Calculer le pgcd de 33 et 18.

Remarque : Géométriquement, trouver le pgcd revient à paver un rectangle avec des carrés de taille maximale.



Théorème 3 (Bézout) : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

Pour trouver u et v , on "remonte" l'algorithme d'Euclide.

Exemple 13 : On reprend l'exemple précédent avec 33 et 18.

8.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 9 : Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B *divise* A s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B|A$.

Proposition 10 : Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si $A|B$ et $B|A$, alors il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.
2. Si $A|B$ et $B|C$ alors $A|C$.
3. Si $C|A$ et $C|B$ alors $C|(AU + BV)$, pour tout $U, V \in \mathbb{K}[X]$.

Théorème 4 (Division euclidienne des polynômes) : Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R tels que :

Q est appelé le *quotient* et R le *reste* et cette écriture est la *division euclidienne* de A par B .

Remarque : $R = 0$ si et seulement si $B|A$.

Exemple 14 : On pose une division de polynômes comme on pose une division euclidienne de deux entiers. Prenons par exemple $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$.

Alors on trouve $Q = \dots\dots\dots$ et $R = \dots\dots\dots$. On n'oublie pas de vérifier qu'effectivement $A = BQ + R$.

Proposition 11 (pgcd) : Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Il existe un unique polynôme **unitaire** de plus grand degré qui divise à la fois A et B . Cet unique polynôme est appelé le **pgcd** (plus grand commun diviseur) de A et B que l'on note $\text{pgcd}(A, B)$.

Théorème 5 (algorithme d'Euclide) : Comme pour les entiers, il existe une version polynomiale de l'algorithme d'Euclide. En effet, puisque $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R)$, on peut alors obtenir le pgcd de A et B par divisions euclidiennes successives. Le pgcd sera alors Le degré du reste diminue à chaque étape.

Définition 10 : Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont **premiers entre eux** si $\text{pgcd}(A, B) = 1$.

Théorème 6 (Théorème de Bézout) : Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. On note $D = \text{pgcd}(A, B)$. Il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = D$.

Corollaire 1 : Soient A et B deux polynômes. A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.

9 Racine d'un polynôme, factorisation

9.1 Racines d'un polynôme

Définition 11 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** (ou un **zéro**) de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 12 :

$$P(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X - \alpha \text{ divise } P$$

Définition 12 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une *racine de multiplicité k* de P si $(X - \alpha)^k$ divise P alors que $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P . Lorsque $k = 1$ on parle d'une *racine simple*, lorsque $k = 2$ d'une *racine double*, etc. On dit aussi parfois que α est une *racine d'ordre k* .

Proposition 13 : Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- (i) α est une racine de multiplicité k de P .
- (ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.
- (iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque : Si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$, alors le polynôme dérivé de P est $P'(X) =$
et $\deg(P') =$

Proposition 14 (formule de Leibniz) : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. La dérivée n -ième d'un produit s'exprime alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Théorème 7 (Théorème de d'Alembert-Gauss) : Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

9.2 Polynômes irréductibles

Définition 13 : Un polynôme irréductible P est un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de P sont les constantes ou P lui-même (à une constante multiplicative près).

Remarque : La notion de polynôme irréductible pour l'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ correspond à la notion de nombre premier pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$.

Exemple 15 :

- Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Par conséquent il y a une infinité de polynômes irréductibles.
- $X^2 - 1 =$
- $X^2 + 1 =$
- $X^2 - 2 =$

Nous avons l'équivalent du lemme d'Euclide de $\mathbb{Z}$ pour les polynômes :

Proposition 15 (Lemme d'Euclide) : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible et soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $P|AB$ alors $P|A$ ou $P|B$.

9.3 Relations entre coefficients et racines

Définition 14 (polynôme scindé) : On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n est scindé

sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$P(X) = a_n \prod_{j=1}^n (X - r_j)$$

Proposition 16 : *Si un polynôme est scindé, on peut exprimer les coefficients en fonction des racines en développant l'expression précédente. En particulier, on a*

$$\sum_{k=1}^n r_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

et

$$\prod_{k=1}^n r_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

9.4 Théorème de factorisation

Théorème 8 : *Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :*

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont des polynômes irréductibles distincts. De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Il s'agit de l'analogie de la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers.

9.5 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème 9 : *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

Théorème 10 : *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 ayant un discriminant $\Delta < 0$.*

10 Fractions rationnelles

Définition 15 : Une *fraction rationnelle* à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$F = \frac{A}{B}$$

où $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont deux polynômes et $B \neq 0$.

Toute fraction rationnelle se décompose comme une somme de fractions rationnelles élémentaires que l'on appelle des « éléments simples ». Mais les éléments simples sont différents sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$.

10.1 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Théorème 11 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$) : Soit A/B une fraction rationnelle avec $A, B \in \mathbb{C}[X]$, $\text{pgcd}(A, B) = 1$ et $B = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_r)^{k_r}$. Alors il existe une et une seule écriture :

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} = E &+ \frac{a_{1,1}}{(X - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{a_{1,2}}{(X - \alpha_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{a_{1,k_1}}{(X - \alpha_1)} \\ &+ \frac{a_{2,1}}{(X - \alpha_2)^{k_2}} + \frac{a_{2,2}}{(X - \alpha_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{a_{2,k_2}}{(X - \alpha_2)} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{a_{r,1}}{(X - \alpha_r)^{k_r}} + \frac{a_{r,2}}{(X - \alpha_r)^{k_r-1}} + \dots + \frac{a_{r,k_r}}{(X - \alpha_r)} \end{aligned}$$

Le polynôme E s'appelle la *partie polynomiale* (ou *partie entière*). Les termes $\frac{a}{(X - \alpha)^i}$ sont les *éléments simples* sur $\mathbb{C}$.

10.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Théorème 12 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$) : Soit A/B une fraction rationnelle avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$, $\text{pgcd}(A, B) = 1$. Alors A/B s'écrit de manière unique comme somme :

- d'une partie polynomiale $E(X)$,
- d'éléments simples du type $\frac{a}{(X - \alpha)^i}$,
- d'éléments simples du type $\frac{aX + b}{(X^2 + \alpha X + \beta)^i}$.

Où les $X - \alpha$ et $X^2 + \alpha X + \beta$ sont les facteurs irréductibles de $B(X)$ et les exposants i sont inférieurs ou égaux à la puissance correspondante dans cette factorisation.

Méthodologie

- 1ère étape : Trouver la partie polynomiale en effectuant la division euclidienne de A par B .
- Factoriser le dénominateur.
- Ecrire la décomposition théorique en éléments simples.
- Déterminer les coefficients.

Pour la dernière étape, il existe plusieurs méthodes. Une première consiste à mettre sous le même dénominateur et identifier les coefficients pour obtenir un système à résoudre. Cela devient vite fastidieux quand le système devient grand.

Une autre méthode, plus rapide, consiste à multiplier par l'un des facteurs constituant le dénominateur, puis à évaluer le tout en la racine de ce facteur.

Enfin, une autre possibilité est simplement d'évaluer l'expression en différentes valeurs, ce qui donnera lieu à nouveau à un système à résoudre.

Exemple 16 : Décomposition en éléments simples de $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{3X^4 + 5X^3 + 11X^2 + 5X + 3}{(X^2 + X + 1)^2(X - 1)}$. Comme $\deg P < \deg Q$ alors $E(X) = 0$. Le dénominateur est déjà factorisé sur $\mathbb{R}$ car $X^2 + X + 1$ est irréductible. La décomposition théorique est donc :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{aX + b}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1} + \frac{e}{X - 1}.$$

Il faut ensuite mener au mieux les calculs pour déterminer les coefficients afin d'obtenir :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-1}{X^2+X+1} + \frac{3}{X-1}.$$